Zadania 1

Przedsiębiorstwo wytwarza cztery rodzaje wyrobów: *A*, *B*, *C*, *D*, które są obrabiane na dwóch maszynach M_1 i M_2. Czas pracy maszyn przypadający na obróbkę jednostki poszczególnych wyrobów podany jest w tablicy:

Wyroby	Czas pracy przypadający na jednostkę wyrobu (w godz.)	
	M_1	M_2
A	1,0	2,0
B	1,5	2,5
C	2,0	3,0
D	1,0	0,5

Rynek może wchłonąć każdą ilość produkcji. Jednostkowe zyski (w zł) wynoszą przy produkcji wyrobu *A* – 2 zł, wyrobu *B* – 2,5, wyrobu *C* – 4,0, a wyrobu *D* – 1,5. Maszyna M_1 może pracować miesięcznie nie więcej niż 100 godzin, a maszyna M_2 co najmniej 50 godz.
Określić optymalny asortyment produkcji umożliwiający maksymalizację zysku.

Rozwiązanie

Powyższe zadanie można przedstawić w postaci następującego zagadnienia programowania liniowego:
zmienne decyzyjne:

x_1 - wielkość produkcji wyrobu *A*,

x_2 - wielkość produkcji wyrobu *B*,

x_3 - wielkość produkcji wyrobu *C*,

x_4 - wielkość produkcji wyrobu *D*,

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 2{,}5x_2 + 4{,}0x_3 + 1{,}5x_4 \rightarrow \max$$

Ograniczenia:

$1{,}0\,x_1+1{,}5\,x_2+2{,}0\,x_3+x_4\leq 100$ (ze względu na limit czasu pracy maszyny M_1)

$2{,}0\,x_1+2{,}5\,x_2+3{,}0\,x_3+0{,}5\,x_4\geq 50$ (ze względu na limit środka II)

$x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$ (warunek brzegowy nieujemności zmiennych)

Zadanie powyższe posiada cztery zmienne decyzyjne. Nie jest więc możliwe rozwiązanie go metodą graficzną. Ponieważ są tylko dwa ograniczenia, przeto można taką metodą rozwiązać zadanie dualne do powyższego. Funkcja celu jest maksymalizowana. Typowym zwrotem nierówności ograniczającej jest w takim wypadku ≤. Druga z nierówności ma zwrot przeciwny – przed wyznaczeniem zadania dualnego należy więc pomnożyć ją obustronnie przez –1. Nasze zadanie wówczas wygląda następująco:

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=2\,x_1+2{,}5\,x_2+4{,}0\,x_3+1{,}5\,x_4\rightarrow \max$$

Ograniczenia:

$x_1+1{,}5\,x_2+2{,}0\,x_3+x_4\leq 100$

$-2{,}0\,x_1-2{,}5\,x_2-3{,}0\,x_3-0{,}5\,x_4\leq -50$ (ze względu na limit środka II)

$x_1, x_2, x_3, x_4\geq 0$ (warunek brzegowy nieujemności zmiennych)

Można więc wyznaczyć zadanie dualne do niego. Zmiennym decyzyjnym odpowiadają poszczególne równania (i vice versa) prawe strony ograniczeń odpowiadają współczynnikom w funkcji celu (i vice versa). Wobec tego zadanie dualne do naszego wyjściowego zadania jest następujące:

Zmienne decyzyjne:

y_1 , y_2

Funkcja celu:

$$g(y_1, y_2)=100\,y_1-50\,y_2\rightarrow \min$$

Ograniczenia:

$y_1-2\,y_2\geq 2$

$1{,}5\,y_1-2{,}5\,y_2\geq 2{,}5$

$2\,y_1-3\,y_2\geq 4$

$y_1 - 0{,}5\, y_2 \geq 1{,}5$

$y_1, y_2 \geq 0$

Zadanie to może być rozwiązane metodą graficzną.

W kartezjańskim układzie współrzędnych $Y_1 Y_2$ zaznaczamy obszar dopuszczalny, będący częścią wspólną obszarów wyznaczonych przez poszczególne nierówności ograniczające.

$y_1 - 2\, y_2 \geq 2$

po przekształceniu: $y_2 \leq 0{,}5\, y_1 - 1$. Nierówność ta wyznacza obszar leżący poniżej prostej $y_1 - 2\, y_2 = 2$, wraz z tą prostą. Prosta przechodzi przez punkty (2; 0) (4; 1).

$1{,}5\, y_1 - 2{,}5\, y_2 \geq 2{,}5$

po przekształceniu: $3\, y_1 - 5\, y_2 \geq 5$ czyli w postaci kierunkowej $y_2 \leq 0{,}6\, y_1 - 1$. Nierówność ta wyznacza obszar leżący poniżej prostej $3\, y_1 - 5\, y_2 = 5$, wraz z tą prostą. Prosta przechodzi przez punkty (5; 2) (10; 5).

$2\, y_1 - 3\, y_2 \geq 4$

po przekształceniu: $y_2 \leq \frac{2}{3} y_1 - \frac{4}{3}$. Nierówność ta wyznacza obszar leżący poniżej prostej $2\, y_1 - 3\, y_2 = 4$, wraz z tą prostą. Prosta przechodzi przez punkty (2; 0) (5; 2).

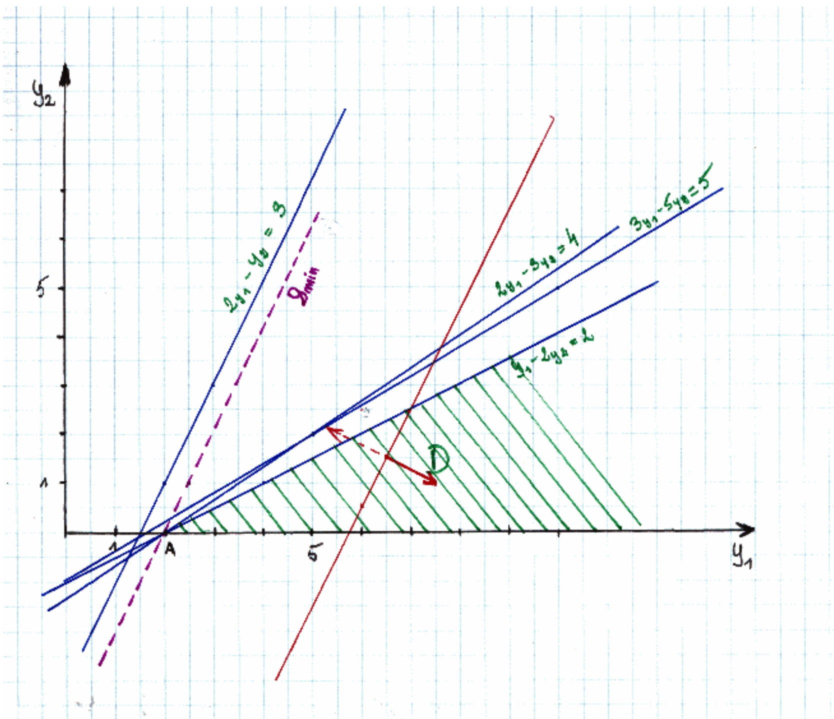
$y_1 - 0{,}5\, y_2 \geq 1{,}5$

po przekształceniu: $2\, y_1 - y_2 \geq 3$ czyli w postaci kierunkowej $y_2 \leq 2\, y_1 - 3$. Nierówność ta wyznacza obszar leżący poniżej prostej $2\, y_1 - y_2 = 3$, wraz z tą prostą. Prosta przechodzi przez punkty (2; 1) (3; 3).

Ze względu na nierówności $y_1, y_2 \geq 0$ obszar dopuszczalny ograniczony jest prostymi OY_1 , OY_2 .

Kolejną czynnością jest naniesienie na obszar dopuszczalny izokwanty funkcji celu. Jednym ze sposobów jest wybór dowolnego punktu wewnątrz obszaru dopuszczalnego i zaznaczenie tzw. gradientu funkcji celu. Gradient ten jest wektorem prostopadłym do izokwanty, wskazującym kierunek i zwrot przemieszczania się izokwanty wraz ze wzrostem wartości funkcji celu. Składowe gradientu są współczynnikami przy zmiennych w funkcji celu.

U nas gradientem jest wektor: $\vec{u}=[100,-50]$. Dla łatwiejszego narysowania, wobec przyjętej skali, posłużyć się można dowolną wielokrotnością wektorów – np. $\vec{u}'=\frac{1}{50}\vec{u}=[2;-1]$ Dwie kratki w prawo, jedna w dół) – zachodzi bowiem równoległość: $\vec{u}\|\vec{u}'$ Optymalnym rozwiązaniem jest taki punkt (zbiór punktów) z obszaru dopuszczalnego, dla którego izokwanta osiąga minimalną wartość – czyli ostatni punkt „zahaczony" jeszcze przez izokwantę przesuwającą się w kierunku wskazanym przez gradient (ze zwrotem przeciwnym do gradientu).



Rysunek 1 Rozwiązanie graficzne zadania dualnego

Obszar dopuszczaly wraz z zaznaczonym gradientem oraz izokwantami przedstawiono na rysunku 1. Jak widać, optymalnym punktem jest punkt A = (2; 0).

Oznacza to następujące rozwiązanie zadania dualnego:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Optymalna wartość funkcji celu wynosi:

$$g_{\min}(2,0) = 200$$

Analizując uzyskane rozwiązanie stwierdzamy, iż nierówności ograniczające:

$$y_1 - 2y_2 \geq 2$$

$$2y_1 - 3y_2 \geq 4$$

zostały spełnione jako równości – oznacza to, że odpowiadające im w zadaniu prymalnym zmienne x_1 oraz x_3 są w rozwiązaniu optymalnym równe zero, natomiast nierówności:

$$1{,}5y_1 - 2{,}5y_2 \geq 2{,}5$$

$$y_1 - 0{,}5y_2 \geq 1{,}5$$

zostały spełnione jako nierówności ostre. Oznacza to, że w rozwiązaniu otymalnym odpowiadające im zmienne x_2 oraz x_4 osiągają w rozwiązaniu optymalnym wartości różne od zera.

Ująć można to w następującej tabeli:

Zadanie prymalne		Zadanie dualne	
Nierówność	Spełniona jako	Nierówność	Spełniona jako
$x_1+1{,}5x_2+2x_3+x_4\leq 100$	równość	$y_1\geq 0$	nierówność ostra
$-2x_1-2x_2-3x_3-0{,}5x_4\leq -50$	nierówność ostra	$y_2\geq 0$	równość
$x_1\geq 0$	nierówność ostra	$y_1-2y_2\geq 2$	równość
$x_2\geq 0$	równość	$1{,}5y_1-2{,}5y_2\geq 2{,}5$	nierówność ostra
$x_3\geq 0$	nierówność ostra	$2y_1-3y_2\geq 4$	równość
$x_4\geq 0$	równość	$y_1-0{,}5y_2\geq 1{,}5$	nierówność ostra

Wobec powyższego stwierdzamy, że – uwzględniając równości $x_2=0$ oraz $x_4=0$ rozwiązaniami optymalnymi zadania prymalnego jest zbiór rozwiązań następującego układu:

$$\begin{cases} x_1+2x_3=100 \\ -2x_1-3x_3\leq -50 \end{cases}$$

W ukłądzie powyższym drugą nierówność przedstawiono jako nieostrą, gdyż rozwiązaniami zadań programowania liniowego są zbiory posiadające brzegi (przedziały domknięte).

Podstawiając:

$$x_1=100-2x_3$$

dostajemy:

$$-2(100-2x_3)-3x_3\leq -50$$

$$3x_3-200\leq -50$$

$$3x_3\leq 150$$

$$x_3\leq 50$$

A zatem rozwiązanie optymalne zadania prymalnego można przedstawić jako:

$$\begin{cases} x_1=100-2x_3 \\ x_2=0 \\ x_3\leq 50 \\ x_4=0 \end{cases}$$

Niech $t\in\langle 0;50\rangle$. Wówczas:

$$\begin{cases} x_1 = 100 - 2t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Oznacza to nieskończenie wiele rozwiązań z pewnego przedziału – zależnych od jednego parametru.

Przykładowe rozwiązania to więc np. - dla $t = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$ - czyli produkujemy wyłącznie 100 jednostek wyrobu *A*

lub też np. dla $t = 50$:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 50 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$ - czyli wyłącznie 50 jedn. wyrobu *B*

A np. dla $t = 20$:

$$\begin{cases} x_1 = 60 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 20 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$ - czyli 60 jedn. wyrobu A oraz 20 jedn. wyrobu *B*

Każdorazowo – przy takim asortymencie – nasz zysk wyniesie:

$$f(100;0;0;0;) = f(0;0;50;0;) = f(60;0;40;0;) = 200$$

- a więc tyle, ile wynosi optymalna wartość funkcji celu w zadaniu dualnym.