Zadanie

Rafineria naftowa otrzymała zamówienie na dwa rodzaje specjalnych paliw węglowodorowych X oraz Y. Zamówienie opiewa na minimum 4 000 galonów paliwa X i minimum 2 400 galonów paliwa Y. Paliwa te mogą być wytwarzane niezależnie w dwóch procesach: P_1 i P_2.

W ciągu 1 godziny trwania procesu P_1 zużywa się 1 baryłkę ropy A oraz 3 baryłki ropy B i otrzymuje 100 galonów paliwa X oraz 30 galonów paliwa Y.

W ciągu 1 godziny trwania procesu P_2 zużywa się 4 baryłki ropy A oraz 2 baryłki ropy B i otrzymuje 50 galonów paliwa X oraz 40 galonów paliwa Y.

Zasób ropy A wynosi 240 baryłek, a ropy B 180 baryłek.

Zysk z godziny produkcji według procesu P_1 wynosi 200 zł, a koszty 300 zł.

Zysk z godziny produkcji według procesu P_2 wynosi 500 zł, a koszty 600 zł.

Szef produkcji poszukuje takiej kombinacji procesów P_1 i P_2 (tzn. chce ustalić na ile godzin uruchomić proces P_1, a na ile P_2), aby osiągnąć maksymalny zysk.

Rozwiązanie

Powyższe zadanie możemy przedstawić jako następujące zagadnienie programowania liniowego:

zmienne decyzyjne:

x_1 - ilość godzin trwania procesu P_1,

x_2 - ilość godzin trwania procesu P_2,

funkcja celu:

$$f(x_1, x_2) = 200x_1 + 500x_2 \rightarrow max$$

ograniczenia:

$x_1 + 4x_2 \le 240$ (limit ropy A)

$3x_1 + 2x_2 \le 180$ (limit ropy B)

$100x_1 + 50x_2 \ge 4000$ (minimum ilości paliwa X)

$30x_1 + 40x_2 \ge 2400$ (minimum ilości paliwa Y)

$x_1 \ge 0$

$x_2 \ge 0$ - warunki nieujemności, ze względu na sensowność rozwiązania.

Powyższe zagadnienie rozwiązane zostanie metodą simplex.

W pierwszej kolejności, musimy sprowadzić zagadnienie do tzw. postaci kanonicznej.Dokonujemy tego likwidując wszystkie nierówności. Likwidujemy je w taki sposób, iż zamieniamy je na równania, poprzez wprowadzenie zmiennych swobodnych.

Po wprowadzeniu zmiennych swobodnych, nasz układ ograniczeń wygląda następująco:

$$x_1+4x_2+s_1=240$$
$$3x_1+2x_2+s_2=180$$
$$100x_1+50x_2-s_3=4000$$
$$30x_1+40x_2-s_4=2400$$
$$x_1, x_2\geq 0$$
$$s_1, s_2, s_3, s_4\geq 0$$

Powyższych ograniczeń nie można jeszcze wykorzystać bezpośrednio w metodzie simplex, gdyż zmienne nie generują bazy jednostkowej – zmienne swobodne w równaniu trzecim oraz czwartym mają znaki ujemne. Aby wygenerować bazę jednostkową, wprowadzamy do tych równań zmienne sztuczne.

$$x_1+4x_2+s_1=240$$
$$3x_1+2x_2+s_2=180$$
$$100x_1+50x_2-s_3+t_1=4000$$
$$30x_1+40x_2-s_4+t_2=2400$$
$$x_1, x_2\geq 0$$
$$s_1, s_2, s_3, s_4\geq 0$$
$$t_1, t_2=0$$

Wprowadzenie zmiennych sztucznych wymusza modyfikację funkcji celu – wprowadzamy do niej zmienne sztuczne z wagą niekorzystną z punktu widzenia kierunku optymalizacji. W naszym przypadku (maksymalizacja) wprowadzamy je z wagą ujemną (–M, gdzie M jest bardzo dużą liczbą dodatnią: $M \to \infty$). Funkcja celu będzie miała postać:

$$f(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, t_1, t_2) = 200x_1 + 500x_2 - M t_1 - M t_2 \to max$$

Budujemy I tablicę simplex.

I tablica simplex – rozwiązanie początkowe

baza: $\mathbf{x^B} = [s_1, s_2, t_1, t_2]$

	$\mathbf{x^T}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2		
$\mathbf{x^B}$	c_j	**200**	**500**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**b**	**wyj**
s_1	**0**	1	4	1	0	0	0	0	0	240	**240**
s_2	**0**	3	2	0	1	0	0	0	0	180	**60**
t_1	**–*M***	100	50	0	0	–1	0	1	0	4000	**40**
t_2	**–*M***	30	40	0	0	0	–1	0	1	2400	**80**
	z_j	-130M	-90M	0	0	M	M	–M	–M	**-6400*M***	
	Δ_j	**200 +130*M***	**500 +90*M***	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**0**	**0**		

Kryterium wejścia do bazy spełnia zmienna x_1 – gdyż odpowiada jest największy dodatni wskaźnik optymalności Δ_j . Kryterium wyjścia spełnia zmienna t_1 , gdyż odpowiada jej najmiejsza dodatnia wartość ilorazów elementów kolumny **b** przez kolumnę zmiennej wchodzącej x_1 .

Wobec tego:

wchodzi: x_1 ,

wychodzi: t_1 .

II Tablica simplex

baza: $\mathbf{x}^{\mathbf{B}}{}_{=}[s_1, s_2, x_1, t_2]$

	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2		
$\mathbf{x}^{\mathbf{B}}$	c_j	**200**	**500**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**b**	**wyj**
s_1	**0**	0	3,5	1	0	0,01	0	–0,01	0	200	**57,14**
s_2	**0**	0	0,5	0	1	0,03	0	–0,03	0	60	**120**
x_1	**200**	1	0,5	0	0	–0,01	0	0,01	0	40	**80**
t_2	**–*M***	0	25	0	0	0,3	–1	–0,3	1	1200	**48**
	z_j	200	100-25*M*	0	0	–2-0,3*M*	*M*	2 +0,3*M*	–*M*	**8000-1200*M***	
	Δ_j	**0**	**400 +25*M***	**0**	**0**	**2 +0,3*M***	**–*M***	**–2-0,3*M***	**0**		

wchodzi: x_2 ,

wychodzi: t_2 .

III Tablica simplex

baza: $\mathbf{x}^{\mathbf{B}}{}_{=}[s_1, s_2, x_1, x_2]$

	$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2		
$\mathbf{x}^{\mathbf{B}}$	c_j	**200**	**500**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**b**	**wyj**
s_1	**0**	0	0	1	0	–0,032	0,14	0,032	–0,14	32	**228,57**
s_2	**0**	0	0	0	1	0,024	0,02	–0,024	–0,02	36	**1800**
x_1	**200**	1	0	0	0	–0,016	0,02	0,016	–0,02	16	**800**
x_2	**500**	0	1	0	0	0,012	–0,04	–0,012	0,04	48	—
	z_j	200	500	0	0	2,8	–16	– 2,8	16	**27200**	
	Δ_j	**0**	**0**	**0**	**0**	**–2,8**	**16**	**2,8-*M***	**–16 – *M***		

wchodzi: s_4 ,

wychodzi: s_1

IV Tablica simplex

baza: $\mathbf{x}^{\mathbf{B}} = [s_4, s_2, x_1, x_2]$

	x^T	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2		
$\mathbf{x}^{\mathbf{B}}$	c_j	**200**	**500**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**b**	**wyj**
s_4	**0**	0	0	7,1429	0	–0,2286	1	0,2286	–1	228,571	—
s_2	**0**	0	0	-0,1429	1	0,0286	0	–0,0286	0	31,429	**1100**
x_1	**200**	1	0	-0,1429	0	–0,0114	0	0,0114	0	11,429	—
x_2	**500**	0	1	0,29	0	0,0029	0	–0,0029	0	57,143	**20000**
	z_j	200	500	114,286	0	–0,8571	0	0,8571	0	**30857,14**	
	Δ_j	**0**	**0**	**–114,286**	**0**	**0,8571**	**0**	**0,8571 -*M***	**–*M***		

wchodzi: s_3 ,

wychodzi: s_2

V Tablica simplex

baza: $\mathbf{x}^{\mathbf{B}} = [s_4, s_2, x_1, x_2]$

	x^T	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	t_1	t_2		
$\mathbf{x}^{\mathbf{B}}$	c_j	**200**	**500**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***	**b**	**wyj**
s_4	**0**	0	0	6	8	0	1	0	–1	480	
s_3	**0**	0	0	–5	35	1	0	–1	0	1100	
x_1	**200**	1	0	–0,2	0,4	0	0	0	0	24	
x_2	**500**	0	1	0,3	–0,1	0	0	0	0	54	
	z_j	200	500	110	30	0	0	0	0	**31800**	
	Δ_j	**0**	**0**	**–110**	**–30**	**0**	**0**	**–*M***	**–*M***		

Wszystkie wskaźniki optymalności są liczbami niedodatnimi a w bazie nie pozostała żadna ze zmiennych sztucznych, zatem uzyskane w 5. kroku rozwiązanie jest już rozwiązaniem optymalnym. Rozwiązanie to jest następujące:

$$\begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 54 \end{cases}$$

Optymalna wartość funkcji celu wynosi natomiast:

$$f_{max}(24;54)=200\cdot 24+500\cdot 54=31800$$

Wartość $s_3=1100$ oznacza, iż nierówność ograniczająca $100x_1+50x_2\geq 4000$ spełniona została jako nierówność ostra – wyprodukowano o 1100 galonów paliwa X więcej niż wynosiło założone minimum 4000. Z kolei wartość $s_4=480$ oznacza, iż nierówność ograniczająca $30x_1+40x_2\geq 2400$ również została spełniona jako nierówność ostra – tj. wyprodukowano o 480 galonów paliwa Y więcej, niż wynosiło założone minimum 2400.

Pozostałe nierówności spełnione zostały jako równości, co oznacza, iż całość zasobów ropy A oraz B została wykorzystana.