Rozwiązywanie układów równań liniowych.

Przykład

Rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t + u = 4 \\ 3x + 6y + 5z - 4t + 3u = 5 \\ x + 2y + 7z - 4t + u = 11 \\ 2x + 4y + 2z - 3t + 3u = 6 \end{cases}$$

W układzie tym mamy 4 równania i 5 niewiadomych. Nie jest zatem możliwe rozwiązanie go metodą Cramera (ani żadną inną bezpośrednią metodą). Co więcej układ ten nie ma w ogóle szans na posiadanie jednego (jedynego) rozwiązania. Może być to układ nieoznaczony lub sprzeczny. Aby to sprawdzić i ewentualnie wyznaczyć rozwiązania, skorzystamy z *twierdzenia Kroneckera-Capellego*.

Budujemy macierze - współczynników oraz uzupełnioną, układu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Wykonując elementarne operacje na wierszach i kolumnach, szukamy rzędu macierzy **A** oraz **U**. Ponieważ macierze te są do siebie bardzo podobne – różnią się tylko jedną kolumną, proces obliczeniowy można wydatnie usprawnić obliczając rzędy te niejako jednocześnie. W tym celu przekształcamy tylko macierz **U** traktując w szczególny sposób jej ostatnią kolumnę. Mianowicie podczas dodawania do siebie elementów poszczególnych kolumn (pomnożonych ewentualnie przez wybraną liczbę) **nie** dodajemy **nigdy** ostatniej kolumny do innych. W drugą stronę operacje wykonujemy bez ograniczeń; bez ograniczeń także możemy dodawać wiersze.

nie wolno

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

wolno

wolno

Wyznaczamy zatem rząd macierzy **U**. Pomiędzy kolejnymi przekształceniami macierzy zapisywane będą dokonane przekształcenia elementarne, tzn. numer wiersza (kolumny), którego elementy dodajemy (i ew. przez co mnożymy), do którego dodajemy i który wiersz (kolumna) z tych dwu w wyniku operacji się zmienia.

$$\mathbf{R(U)} = \mathbf{R}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1w\cdot(-3)+2w \to 2w \\ 1w\cdot(-1)+3w \to 3w \\ 1w\cdot(-2)+4w \to 4w \end{array} =$$

$$= \mathbf{R}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

„1" w pierwszej kolumnie stała się jedynym elementem niezerowym w swojej kolumnie, jest ona w stanie, co można bez trudu zauważyć, wyzerować wszystkie pozostałe elementy z pierwszego wiersza. To samo może też zrobić „2" z drugiej kolumny – wybór należy do nas. Po tej operacji analogiczna sytuacja występuje w kolumnie piątej.

$$= \mathbf{R}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Zgodnie z własnościami rzędu macierzy, wiersze bądź kolumny, złożone z samych zer, wykreślamy i eliminujemy z dalszych obliczeń. Każda kolumna (oprócz ostatniej) odpowiada jednej niewiadomej, każdy wiersz jednemu równaniu, w związku z tym zapamiętujemy, której niewiadomej kolumnę wykreślono, w tym wypadku **y**.

2w +3w →3w

$$= R\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = R\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = R\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Rząd macierzy **U** jest równy 3, ponieważ w wyniku przeprowadzenia wyłącznie dozwolonych operacji elementarnych otrzymaliśmy macierz kwadratową, w której nie można już wyzerować więcej elementów.

Podczas zerowania przestrzegano reguły nie działania ostatnią kolumną na inne i dlatego widać, że rząd macierzy **A** jest taki sam jak macierzy **U**, gdyż proces wyzerowywania jej przebiegałby identycznie i pod koniec zostałaby identyczna macierz kwadratowa 3x3 – inna sytuacja nastąpiłaby, gdyby końcowa macierz zawierała dodatkową kolumnę – pozostałość po kolumnie wyrazów wolnych.

Wobec tego:

$$\mathbf{R(U) = R(A) = 3}$$

Ilość niewiadomych wynosi **5**, zatem na mocy twierdzenia Kroneckera-Capelliego stwierdzamy, że układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych do 2 parametrów. Rozwiązania te wyznaczamy w taki sposób, że po przeniesieniu na prawą stronę niewiadomych uznanych za parametry (będą nimi te niewiadome, których kolumny wykreśliliśmy –u nas **y** oraz **z**) oraz eliminując te równania, których wiersze zostały wykreślone –u nas trzecie równanie.

$$\begin{cases} x - 2t + u = 4 - 2y - 3z \\ 3x - 4t + 3u = 5 - 6y - 5z \\ 2x - 3t + 3u = 6 - 4y - 2z \end{cases}$$

Otrzymany układ równań jest typu n x n i jest jednocześnie układem Cramera. Można go zatem rozwiązać metodą Cramera.

Obliczamy wyznacznik główny układu:

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

oraz wyznaczniki dla niewiadomych

$$\mathbf{W_x} = \begin{vmatrix} (4-2y-3z) & -2 & 1 \\ (5-6y-5z) & -4 & 3 \\ (6-4y-2z) & -3 & 3 \end{vmatrix} = 4y-2z-9$$

$$\mathbf{W_t} = \begin{vmatrix} 1 & (4-2y-3z) & 1 \\ 3 & (5-6y-5z) & 3 \\ 2 & (6-4y-2z) & 3 \end{vmatrix} = 4z-7$$

$$\mathbf{W_u} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & (4-2y-3z) \\ 3 & -4 & (5-6y-5z) \\ 2 & -3 & (6-4y-2z) \end{vmatrix} = 4z+3$$

Ostateczne rozwiązanie wyznaczamy ze wzorów Cramera:

$$\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} = \dfrac{4y-2z-9}{2} \\ t = \dfrac{W_t}{W} = \dfrac{4z-7}{2} \\ u = \dfrac{W_u}{W} = \dfrac{4z+3}{2} \\ y \in \Re \\ z \in \Re \end{cases}$$

Ostatnie dwie niewiadome są *parametrami*, tzn. że mogą przyjmować dowolne wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. Wartości pozostałych niewiadomych są zależne od tego, jakie wartości **y** oraz **z** przyjmiemy.
Uwaga: gdyby w naszym zadaniu jako parametry przyjęto inne niewiadome, bądź pominięto inne równanie (w wyniku realizacji nieco innej koncepcji zerowania) otrzymane wyniki byłyby pozornie inne. Przykładowo przyjmując jako parametry **x** oraz **y** otrzymalibyśmy takie rozwiązanie:

Łatwo sprawdzić, że jest to samo rozwiązanie. Podstawiając bowiem do otrzymanego najpierw rozwiązania np. **y = 0** **z = 0** otrzymujemy **x = -4.5** **t = -3.5** **u = 1.5**. Jeżeli teraz podstawimy wyliczoną wartość **x = -4.5** oraz przyjęte **y = 0** do drugiego wariantu rozwiązania otrzymamy **z = 0**, **t = -3.5** oraz **u = 1.5**, czyli obydwa warianty rozwiązania są ze sobą zgodne.

Przykład pochodzi z podręcznika *„Analiza matematyczna w zadaniach”* – W. Krysicki, L. Włodarski, PWN, Warszawa 1999.
Koncepcja rozwiązania i objaśnienia: Sebastian Dziarmaga-Działyński