Zadanie

Funkcja produkcji ma postać:

$$f(k,z) = k^{1/4} + 4z^{1/4} \qquad k,z \geq 0$$

a) Sformułuj zadanie minimalizacji kosztów – napisz, co jest zmienną a co parametrem tego zadania. Czy para $k = 16$, $z = 1$ jest rozwiązaniem zadania przy cenach $v_k = 3$, $v_z = 4$?

b) Wiadomo, że przy pewnych cenach czynników produkcji $\bar{v}_k$, $\bar{v}_z$ (niekoniecznie takich, jak w poprzednim podpunkcie) minimalny koszt wytworzenia 4 jednostek produktu wyniósł 23 j.p. Wyznacz funkcję kosztu przy założeniu, że ceny są ustalone na poziomach $\bar{v}_k$ i $\bar{v}_z$.

c) Jaka cena produktu p gwarantuje, że optymalny poziom produkcji wynosi $y = 10$? (o cenach czynników produkcji zakładamy, że są takie same, jak w poprzednim podpunkcie)

Rozwiązanie

Funkcja kosztów ma postać:

$$c(y) = v_k \cdot k(y) + v_z \cdot z(y)$$

Zadanie minimalizacji kosztów ma postać:

$$\begin{cases} \min\{v_k k + v_z z\} \\ f(k,z) = y \\ k,z \geq 0 \end{cases}$$

v_k, v_z - ceny czynników produkcji są parametrami zadania;

y – poziom produkcji – jest zmienną zadania.

k, z – są to również zmienne, jednak nie występujące jawnie (ich funkcją jest y)

Warunki optymalności:

1) $S_{kz}(k,z) = \frac{\frac{\partial f}{\partial k}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{v_k}{v_z}$

2) $f(k,z) = y$

Z 1): $S_{kz}(k,z) = \frac{k^{-3/4}}{4z^{-3/4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{k}{z}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{3}{4}}$, zatem:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{z}{k}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{v_k}{v_z}$$

$$\frac{z^{3/4}}{4k^{3/4}} = \frac{v_k}{v_z}$$

$$z^{3/4} = 4k^{3/4} \cdot \frac{v_k}{v_z} \quad /^{4/3}$$

$$z = 4^{4/3} k \cdot \left(\frac{v_k}{v_z}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Podstawiamy do 2):

$$k^{1/4} + 4z^{1/4} = y$$

$$k^{1/4} + 4 \cdot 4^{1/3} k^{1/4} \cdot \left(\frac{v_k}{v_z}\right)^{\frac{1}{3}} = y$$

$$k^{1/4} + 4^{4/3} k^{1/4} \cdot \left(\frac{v_k}{v_z}\right)^{\frac{1}{3}} = y$$

$$k^{1/4}\left[1 + 4^{4/3} \cdot \left(\frac{v_k}{v_z}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = y$$

$$k^{1/4} = \frac{y}{1 + 4^{4/3} \cdot \left(\frac{v_k}{v_z}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$k^{1/4} = \frac{y}{1 + 4^{4/3} \cdot \frac{v_k^{1/3}}{v_z^{1/3}}}$$

$$k^{1/4} = \frac{y}{\frac{4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}}{v_z^{1/3}}}$$

$$k^{1/4} = \frac{v_z^{1/3} \cdot y}{4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}} \quad /^4$$

$$k = \frac{v_z^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}$$

$$z = 4^{4/3} \frac{v_z^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4} \cdot \left(\frac{v_k}{v_z}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$z = \frac{4^{4/3} \cdot v_k^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}$$

$$z = \frac{4^{4/3} \cdot v_k^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}$$

Funkcja warunkowego popytu na czynniki produkcji:

$$\Phi\left(y, v_k, v_z\right) = \left[\frac{v_z^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}, \frac{4^{4/3} \cdot v_k^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}\right]$$

Funkcja kosztu minimalnego:

$$c(y) = v_k \cdot \Phi_k\left(y, v_k, v_z\right) + v_z \cdot \Phi_z\left(y, v_k, v_z\right)$$

Podstawiamy do funkcji produkcji, oraz funkcji warunkowego popytu $v_k = 3$, $v_z = 4$.

$$y = y(16;1) = 16^{1/4} + 4 \cdot 1^{1/4} = 2 + 4 = 6$$

$$\Phi(6,3,4) = \left[\frac{4^{4/3} \cdot 6^4}{\left(4^{4/3} \cdot 3^{1/3} + 4^{1/3}\right)^4}, \frac{4^{4/3} \cdot 3^{4/3} \cdot 6^4}{\left(4^{4/3} \cdot 3^{1/3} + 4^{1/3}\right)^4}\right]$$

$$\Phi(6,3,4) = \left[\frac{5184 \cdot \sqrt[3]{4}}{\left(4\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}\right)^4}, \frac{15552\sqrt[3]{12}}{\left(4\sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}\right)^4}\right]$$

$$\Phi(6,3,4) = [0{,}617,\ 2{,}671]$$

Para $k = 16$, $z = 1$ nie jest rozwiązaniem zadania przy wskazanych cenach.

b)

Funkcja kosztu ma postać:

$$c(y) = v_k \cdot \frac{v_z^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4} + v_z \cdot \frac{4^{4/3} \cdot v_k^{4/3} \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}$$

$$c(y) = \frac{v_k \cdot v_z^{4/3} \cdot y^4 + 4^{4/3} \cdot v_k^{4/3} \cdot v_z \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}$$

$$c(y) = \frac{\left(v_z^{1/3} + 4^{4/3} \cdot v_k^{1/3}\right) v_k \cdot v_z \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^4}$$

$$c(y) = \frac{v_k \cdot v_z \cdot y^4}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^3}$$

Jak wiadomo z warunków zadania c(4) = 23. Warunek ten zostanie wykorzystany w pkt. c.

c)

$$z(y) = py - c(y)$$

Zadanie maksymalizacji zysku ma postać:

$$\max_{y \geq 0} \{ py - c(y) \}$$

Warunek optymalności ma postać:

$$p = c'(y)$$

U nas:

$$p = \frac{4v_k \cdot v_z \cdot y^3}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^3}$$

A korzystając z tego, że $c(4) = 23$, skąd $\frac{256v_k \cdot v_z}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^3} = 23$

W przypadku, gdy optymalny poziom produkcji wynosi $y = 10$ warunek optymalności:

$$p = c'(y)$$

$$p = \frac{4v_k \cdot v_z \cdot 10^3}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^3}$$

Skąd:

$$p = \frac{4000v_k \cdot v_z}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^3}$$

$$p = \frac{\frac{125}{8} \cdot 256v_k \cdot v_z}{\left(4^{4/3} \cdot v_k^{1/3} + v_z^{1/3}\right)^3}$$

$$p = \frac{125}{8} \cdot 23$$

$$p = 359{,}375$$