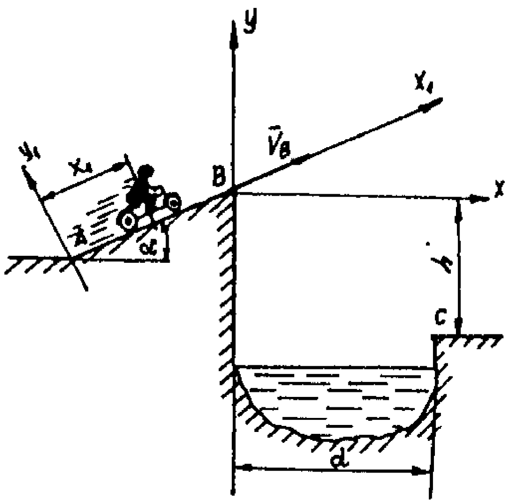
Zadanie

Mając w punkcie *A* prędkość v_A, motocykl (rys. 1) porusza się τ [s] na odcinku $|AB|=l$, tworzących z poziomem kąt α. Gdy siła *P*, powodująca ruch, jest stała na całym odcinku *AB*, motocykl osiąga w punkcie *B* prędkość v_B i przelatuje przez rów o szerokości *d*, znajdując się w powietrzu *T* [s] i ląduje w punkcie *C* z prędkością v_C. Masa motocykla z motocyklistą jest równa *m*.

Rozwiązując zadanie przyjąć motocykl z motocyklistą za punkt materialny i pominąć opory ruchu.



Rysunek 1

Dane:

$\alpha=30^o$

$P\neq 0$

$l=40\,m$

$v_A=0$

$v_B=4\,\dfrac{m}{s}$

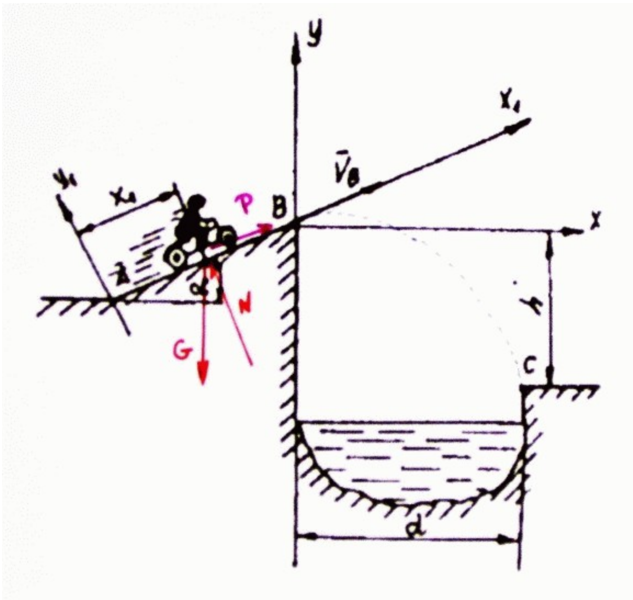
$d=3\,m$

Obliczyć:

τ , h

Rozwiązanie

Rozpatrzmy ruch motocykla na odcinku *AB*. Na punkt materialny (za który uważamy motocykl wraz z motocyklistą) działają na tym odcinku siła ciężkości *G* oraz reakcja normalna *N* (rys. 2).



Dynamiczne równania ruchu motocykla na odcinku AB:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = X_1 \\ m\ddot{y}_1 = Y_1 \end{cases}$$

przy czym: $\ddot{y}_1 = 0$ (motocykl porusza się tylko w kierunku x_1). Zatem:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = X_1 \\ 0 = Y_1 \end{cases}$$

Sumy rzutów sił w poszczególnych kierunkach układu współrzędnych $x_1 y_1$ wynoszą:

$$X_1 = P - G\sin\alpha$$

$$Y_1 = N - G\cos\alpha$$

do tego z zależności pomiędzy masą a ciężarem w polu grawitacyjnym Ziemi:

$$G = mg$$

wobec tego układ różniczkowych równań ruchu ma postać:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = P - mg\sin\alpha \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

stąd:

$$\ddot{x}_1 = \frac{P}{m} - g\sin\alpha$$

(ruch odbywa się tylko wzdłuż osi x_1, więc oś y_1 nie interesuje nas).

całkujemy powyższe równanie dwukrotnie.

Pierwsza całka:

$$\dot{x}_1 = C_1 + \left(\frac{P}{m} - g\sin\alpha\right)\cdot t$$

i druga całka:

$$x_1 = C_2 + C_1 t + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{P}{m} - g\sin\alpha\right)\cdot t^2$$

stałe całkowania obliczamy z warunków początkowych:

$x_1(0)=0$ (bo za chwilę początkową rozważań przyjmujemy punkt *A* - początek układu $x_1 y_1$)

stąd:

$$C_2 = 0$$

$\dot{x}_1(0) = v(0) = v_A = 0$

stąd:

$$C_1 = 0$$

Wobec tego:

$$\dot{x}_1 = \left(\frac{P}{m} - g\sin\alpha\right)\cdot t$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{P}{m} - g\sin\alpha\right)\cdot t^2$$

W chwili $t=\tau$, tj. gdy motocykl opuszcza odcinek *AB* mamy:

$$\dot{x}_1 = v_B \qquad x_1 = l$$

a zatem:

$$\begin{cases} \left(\frac{P}{m}-g\sin\alpha\right)\cdot\tau=v_B \\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{P}{m}-g\sin\alpha\right)\cdot\tau^2=l \end{cases}$$

z powyższego układu równań wyznaczyć możemy *P* (która to wartość nie interesuje nas) oraz τ .
obliczamy:

$$\begin{cases} \left(\frac{P}{m}-g\sin\alpha\right)=\frac{v_B}{\tau} \\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{P}{m}-g\sin\alpha\right)\cdot\tau^2=l \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{v_B}{\tau}\cdot\tau^2=l$$

$$\frac{1}{2}\cdot v_B\cdot\tau=l$$

$$\tau=\frac{2l}{v_B}$$

$$\tau=\frac{2\cdot 40}{4{,}5}$$

$$\boldsymbol{\tau=17{,}78\,s}$$

Na odcinku BC, który ma charakter swobodnego spadku z prędkością początkową (rzutu ukośnego), jedyną działającą siłą jest $G=mg$. Równania ruchu (w układzie *xy*) są teraz następujące:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0 \\ m\ddot{y}=-mg \end{cases}$$

Po uproszczeniu masy:

$$\begin{cases} \ddot{x}=0 \\ \ddot{y}=-g \end{cases}$$

Po pierwszym całkowaniu:

$$\begin{cases} \dot{x}=C_1 \\ \dot{y}=D_1-g\,t \end{cases}$$

po drugim:

$$\begin{cases} x = C_2 + C_{1t} \\ y = D_2 + D_1 t - \frac{1}{2} \cdot g t^2 \end{cases}$$

Warunki początkowe:

$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0$

- stąd:

$$C_2 = 0 \qquad D_2 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_x(0) = v_B \cos\alpha \qquad \dot{y}(0) = v_y(0) = v_B \sin\alpha$$

stąd:

$C_1 = v_B \cos\alpha \qquad D_1 = v_B \sin\alpha$

Zatem położenie punktu określają równania:

$$\begin{cases} x = v_B t \cos\alpha \\ y = v_B t \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g t^2 \end{cases}$$

a jego prędkość:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_B \cos\alpha \\ \dot{y} = v_B \sin\alpha - g t \end{cases}$$

Po upływie czasu τ_1 (czas na dotarcie do punktu *C*) będziemy mieli:

$$\begin{cases} v_B \tau_1 \cos\alpha = d \\ v_B \tau_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \tau_1^2 = -h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{d}{v_B \cos\alpha} \\ v_B \tau_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \tau_1^2 = -h \end{cases}$$

$$v_B \frac{d}{v_B \cos\alpha} \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \left(\frac{d}{v_B \cos\alpha} \right)^2 = -h$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \left(\frac{d}{v_B \cos\alpha} \right)^2 - d\, tg\, \alpha$$

$$h = \frac{g\,d^2}{v_B^2 \cos^2\alpha} - d\,tg\,\alpha$$

$$h = \frac{9,81 \cdot 3^2}{(4,5)^2 \cdot (\cos 30^o)^2} - 3 \cdot tg\,30^o$$

$$\boldsymbol{h = 4,081\,m}$$